Шифр:

А-22

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

2017/2018
Ленинградская область

Район Сосновый Бор

Школа МБОУ „Лицей №8"

Класс 9Б

ФИО Закутей Егор Игоревич

(Мисторский) | А-22

$\boxed{9.6}$

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	X	1	15

лист 3

Для начала найдём минимальное число с суммой цифр 2018. Тогда левее должны идти самые маленькие цифры, а правее большие (по возр.) и ~~чис~~ кол-во цифр должно быть минимальным. Тогда справа напишем, сколько можем 9, т.е. $\left[\frac{2018}{9}\right]$, а ~~по~~ левее напишем остаток от деления 2018 на 9 т.е. $\left\{\frac{2018}{9}\right\}$.

$\left[\frac{2018}{9}\right] = 224$, $\left\{\frac{2018}{9}\right\} = 2$.

Т.е мин. число: $2\underbrace{9\ldots9}_{224 \text{ раз}}$

Увеличим число. Любое число больше $2\underbrace{9\ldots9}_{224}1$ (уе-ло 9) ~~имеет в~~ больше или равно $3\underbrace{0\ldots0}_{224}$.

Т.е. последующие числа будут иметь вид $3\underbrace{x_1\ldots x_{224}}_{224}$ т.к. мы увеличили 2 на единицу, одну из девяток надо уменьшить на 1. т.е. на каком-то месте из $\underbrace{x_1\ldots x_{224}}_{224}$ будет стоять 8. Если расположить по возрастанию эти 224 числа, где 8 стоят на разных позициях, мы получим:

$\underbrace{3\,8\underbrace{9\ldots9}_{223},\ 3\,9\,8\underbrace{9\ldots9}_{222},\ \ldots\ 3\underbrace{9\ldots9}_{223}8}_{224 \text{ числа}}$.

В итоге на 1 месте стоит $2\underbrace{9\ldots9}_{224}$, на последующих

224 места приведенная до этого последовательность т.е. на 225 месте стоит число $3\underbrace{9..9}_{223}8$.

Более математический вид: ~~$3\cdot 10^{224} + \frac{10^{224}}{11}$~~

$$3\cdot 10^{224} + \frac{10^{225}}{11} - \frac{10}{11} - 1 =$$

$$= 3\cdot 10^{224} + \frac{10^{225}-21}{11}$$

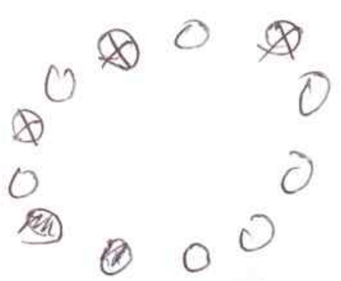
Ответ: $3\underbrace{99..99}_{223 \text{ раз}}8$.

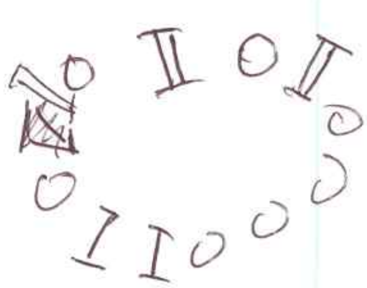
$\boxed{9.7}$ Т.к. мы можем переставлять только местами только синие и красные и синие и зеленые, упростим задачу. Представим, что красные ~~фишки~~ и зеленые фишки это перегородки, которые разделяют шары, а синие - сами шары. Даже не добавляя условий, которые накладываются в связи с тем, что фишки именно меняются местами, можно доказать, что даже способа расставить так шары и перегородки нет.

Для наглядности такой модели приведу пример.

⊗ - зелёные
О - синие
⊘ - красные

II - ~~си~~ зелен
I - красн
О - синие





лист 2

Суть такой модели в том, что переставлять перегородки мы не можем, а шары можем как угодно расположить между этими перегородками.

Наша задача доказать, что невозможно расставить так, чтобы рядом стояли фишки разного цвета.

Перенесём условие на модель:

между каждыми перегородками ~~может~~ должен находится шар, кроме перегородок разного цвета.

Т.к. фишки расставлены подряд, ~~места, то~~ места между перегородками разного цвета (куда не обязательно положить шар) всего 2. Посчитаем сколько всего мест между перегородками.

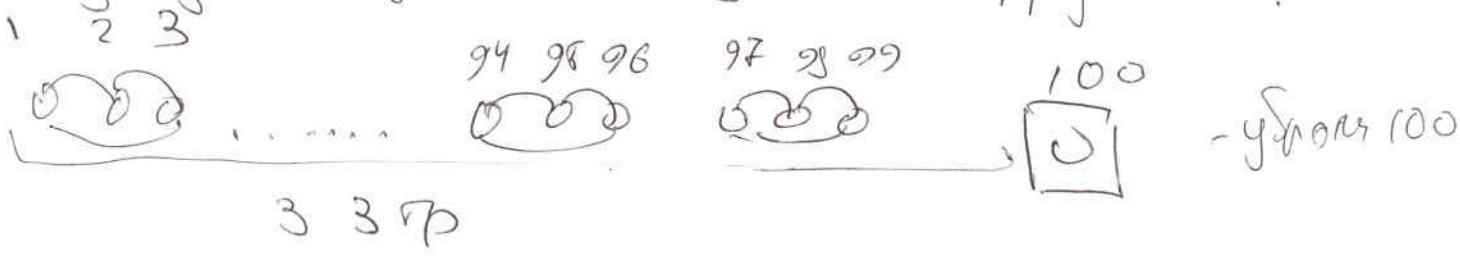
Т.к. фишки расположены по кругу их $20+30=50$

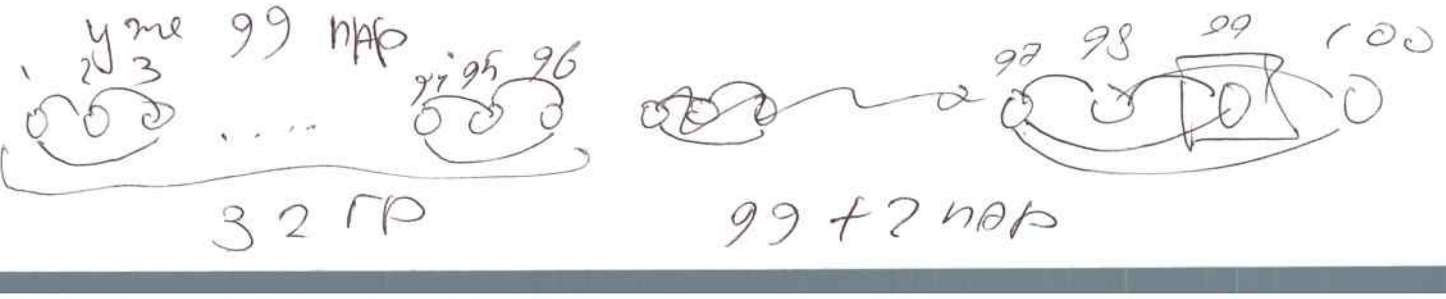
Получается, что всего нам нужно в 48 мест положить обязательно по одному шару, а шаров у нас всего 40. Т.к. так расставить фишки невозможно.

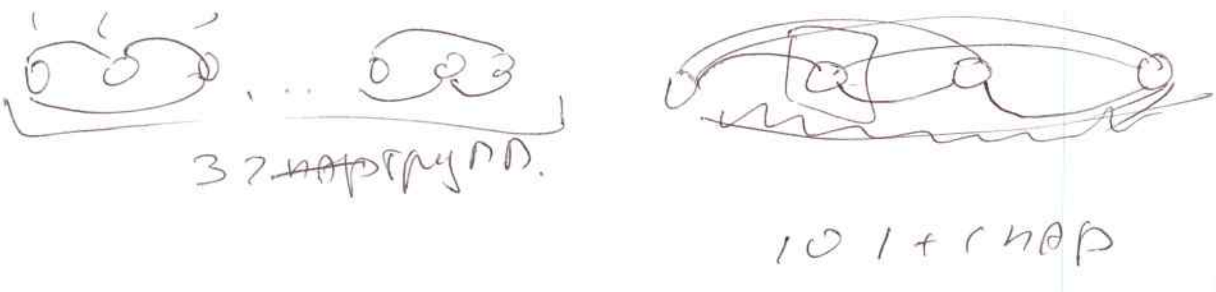
Ответ: нельзя.

9.10.

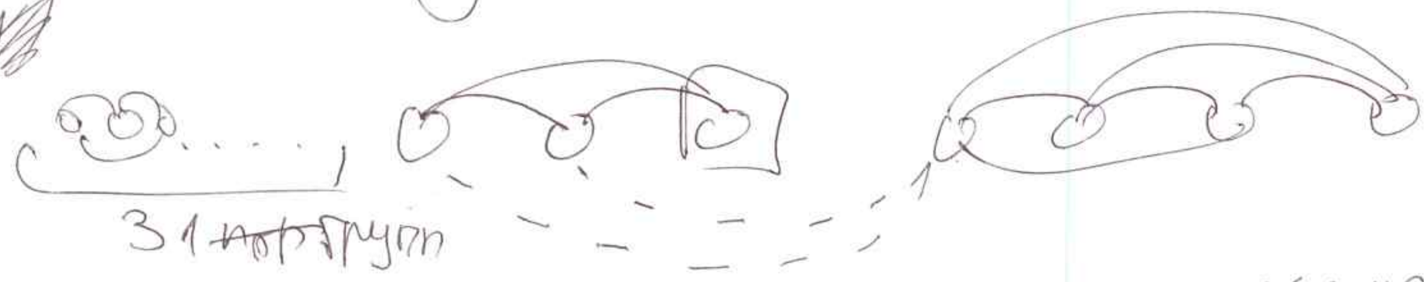
Будем поочередно вынимать из 100 чел. по одному и „вынуждать" детей объединяться в группы.







Далее есть ~~два~~ много способов ~~способа~~ 102 пары, но оба они приводят к одному ответу:



Таким образом ~~когда они начина~~ оставшиеся двое начинают дружить с одним из тех, кого мы до этого убирали (т.к. если он перейдёт к другой группе, из остальных можно будет образовать ~~пар~~ группу), и ~~если~~ если мы пройдём так от 100 до 1 человека, то получим 198 пар.

$$\underbrace{33\cdot 3}_{\text{пар в группах, если убираем одного}} + \underbrace{99}_{\text{по одной паре нужно образовать каждому, кроме одного}} = 198$$

Ответ: 198.

(Интервью)

А-22
лист 3

(9.8)

Запись $x_0 n^0 + x_1 n^1 + \ldots + x_k n^k$ можно записать:

$x_0 + n(x_1 + n(x_2 + n(\ldots)))$ причём

$x_0 + x_1 \ldots + x_n = q$, $x \geq 0$

тогда числа p и q можно записать как:

$p = x_0 + n(x_1 + n(\ldots))$

$q = x_0 + n(x_1 + n(\ldots))$ при том x может быть и меньше нуля.

Но т.к. p и q - простые числа, $|x| \leq 1$

т.е. $p = x_0 + n \cdot d$, $d \in N$

и p может отличаться на $n \cdot d$ на 1.

Тогда чтобы получить простое p, нужно $n \leq 3$

т.к. $3d+1$, $3(d+1)-1$, $3(d+1)$ идут подряд.

Поэтому подходят два н. числа: 2 и 3.

Отв. (ЧТД)

ко таких сочетаний может подходить ученик равно количеству сортов, которых он не получил ~~в~~ в подарке. Из 1 условия следует, что их ≤ 10. Следовательно максимальное количество сочетаний, которые подойдут под второе условие $10 \cdot 1000 = 10000$.

$$\frac{N(N-1)}{2} \le 10000, \quad N \in \mathbb{N}.$$

$$N \le 141.$$

Ответ: 141.

9.2

Возьмём множество из 5 одинаковых чисел. Попробуем ~~…~~ изменить сначала первое, потом второе и т.д. число на не равное начальным пяти. Если удаётся получить это сделать, то не обязательно, если не получится, то обязательно, что сколь-

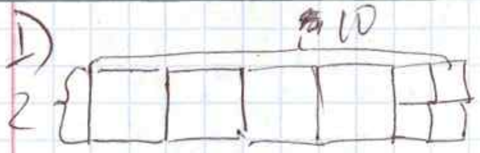
(Чистовик) | А-22 |

1	2	3	4	5	Σ
7	0	0	0	0	7

9.1 ~~Если у нас будет „ряд" из, где будет одинаковое количество квадратов разного размера, мы сможем составить из этих „рядов" квадрат.~~

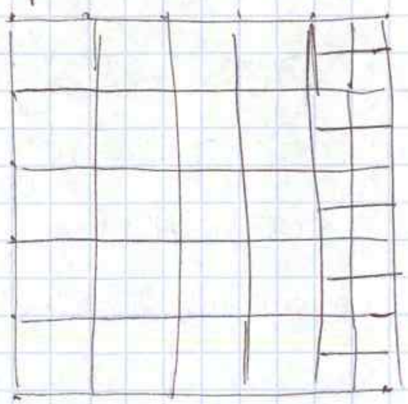
Если у нас будет прямоугольник $m \times n$ клеток, со сторонами m и n, мы сможем составить из них квадрат со стороной mn. ~~Попробуем найти~~ ~~…~~ И если в прямоугольнике будет одинаковое кол-во квадратов разного размера, квадрат со стороной mn тоже будет подходить под эти условия. Составим такие прямоугольники.

1)



$\Downarrow$

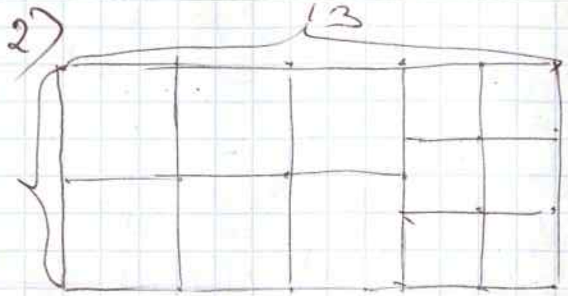
т.к. обе стороны кратны двум, можем составить квадрат со стороной 10кл.



перерисовал более аккуратно

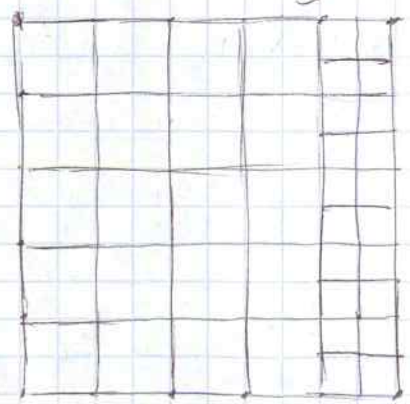
В итоге квадратов со стороной 1 кл 20 шт., и со стороной 2 кл тоже 20.

2)



$\Downarrow$

можно составить квадрат 78 × 78 клеток.



9.4 Рассмотрим, какие ограничения на N накладывает условие, что для любых 11 сортов, он получил хотя-бы одну.

$N \geq 11$, т.к. иначе нельзя будет брать 11 сортов.

~~Конфет~~ Сортов, которых не было в подарке < 11, т.к. иначе можно взять комбинацию, которой в подарке не будет.

Рассмотрим, какие ограничения накладываются на N из условия, что для любых двух сортов есть ученик, получивший ровно одну конфету из двух.

Сочетаний двух сортов, которые мы можем взять $C_N^2 = \frac{N!}{(N-2)! \cdot 2!} = \frac{N(N-1)}{2}$

~~Если таких сочетаний будет больше, чем учеников, условие не будет выполняться~~

Максимально, ~~ско~~ ~~сколько~~ под сколо-

$(x-y)(y-z)(x-z)=(xy-xz-y^2+yz)\cdot(x-z)=x^2y-x^2z-xy^2+xyz-xyz+xz^2+y^2z-yz^2=$

$=x^2y-x^2z+y^2z-xy^2+xz^2-yz^2=$

$=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

$$\frac{x^2+x^2+(y-z)^2}{3}\geq\sqrt[3]{x^2\cdot x^2\cdot(y-z)^2}$$

$$\frac{2x^2+y^2+z^2-2yz}{3}\geq x^2\cdot|y-z|$$

$y-z\leq|y-z|\Rightarrow$

$$\frac{2x^2+y^2+z^2-2yz}{3}\geq x^2(y-z)$$

Аналогично выведем, что:

$$\frac{2y^2+x^2+z^2-2xz}{3}\geq y^2(z-x)$$

$$\frac{2z^2+y^2+x^2-2xy}{3}\geq z^2(x-y)$$

9.2 продолж. (Чистовик)

А-22
Лист 2

кто-то чисел обязательно быть одинаковы.

мн-во:

n, n, n, n, n

логично, что каждые 3 будут делится на остальных.

мн-во:

n, n, n, n, a

выразим a через n:

$$\begin{cases} n+n+n \vdots a \\ n+n+a \vdots n \end{cases}$$

$a=d\cdot n$, $d\in N$

$\frac{n+n+n}{d\cdot n}\in Z$

$\frac{3}{d}\in Z$, $d\in\{1; 3\}$

т.к. $a\neq n$, $d=3$ и $a=3n$.

мн-во с тремя нер. равн членами:

$n, n, n, 3n, a$

$$\begin{cases} n+n+n \vdots a \\ n+n+a \vdots 3n \\ n+n+3n \vdots a \\ n+n+3n+a \vdots n \Rightarrow a = d \cdot n, \text{ где } d \in N \end{cases}$$

$$\frac{n+n+3n}{dn} \in N$$

$$\frac{5}{d} \in N \Rightarrow d \in \{1; 5\}$$

$d \neq n \Rightarrow d = 5$

$$\frac{n+n+a}{3n} \in N$$

$$\frac{n+n+5n}{3n} \notin N \Rightarrow$$

такого множества быть не может $\Rightarrow$ обязательно чтобы среди этих чисел было 4 равных.

Ответ: обязательно.

$\boxed{9.5}$ Вспомним, что среднее арифметическое больше ~~среднего~~ или равно среднего геометрического ~~при положе~~ для положительных чисел. На этом и построим доказательство:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2}, \quad \frac{x^2+y^2}{2} \geq |xy|$$

$$xy \leq |xy| \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$$

Аналогично:

$$\frac{x^2+z^2}{2} \geq xz \text{ и } \frac{y^2+z^2}{2} \geq yz$$

Сложим эти 3 нер-ва:

$$\frac{x^2+y^2+x^2+z^2+y^2+z^2}{2} \geq xy+xz+yz$$

$x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$ и

$x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow xy+xz+yz \leq 1$

(Чистовик)

A-22

лист. 3

Продолжение 9, б)

Теперь сложим эти 3 нер-ва:

$$\frac{2x^2+y^2+z^2-2yz+2y^2+x^2+z^2-2xz+2z^2+y^2+x^2-2xy}{3} \geq$$

$$\geq x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$

$$\frac{3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz}{3} \geq$$

$$\geq (x-y)(y-z)(x-z)$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{2}{3}(xy+xz+yz) \geq$$

$$\geq (x-y)(y-z)(x-z) \quad \text{т.к. } x^2+y^2+z^2=1$$

$$1-\frac{2}{3}(xy+xz+yz) \geq (x-y)(y-z)(x-z)$$

$$\frac{2}{3}(xy+xz+yz) \leq \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$1-\frac{2}{3}(xy+xz+yz) \geq 1-\frac{2}{3}$$

$$1-\frac{2}{3}(xy+xz+yz) \geq \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$(x-y)(y-z)(x-z) \le \frac{1}{3}$

Докажем, что $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

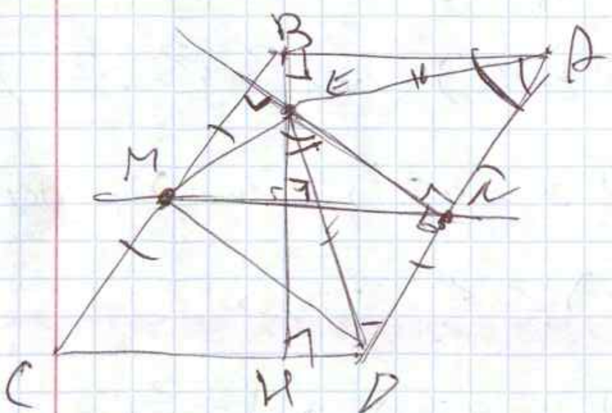
$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$(x-y)(y-z)(x-z) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

ЧТД

$\boxed{9.3}$



Дано:
п-м $ABCD$
$E \in ABCD$,
$AE = DE$, $\angle ABE = 90°$.
M - середина BC
Найти:
$\angle DME$.

Решение.

N - середина AD, NB - серединный перпендикуляр.
Построим среднюю линию MN.
Ответ: $\angle M = 60°$.